λ-Kalkül und Typen
4.Teil

Thorsten Altenkirch
email: alti@informatik.uni-muenchen.de

29. Januar 1997

4 Henkin Modelle

Wir werden in diesem Abschnitt Modell für den λ-Kalkül einführen und analysieren. Diese Art von Modellen gehen auf Henkin zurück, daher werden sie auch Henkin Modelle genannt. [1] Wir werden zwei verschiedene aber äquivalente Formalisierungen betrachten: λ-*Modelle* und Umgebungsmodelle. Die mengentheroetischen (oder vollen) Modelle bilden ein Spezialfall. Wir werden zeigen, daß unser Modellbegriff vollständig ist, d.h. daß sich jede Theorie $\mathcal{E}$ durch ein Modell charakterisieren läßt und daß die vollen Modelle über einer unendlichen Basismenge vollständig für die freie ($\mathcal{E} = \emptyset$) $\beta\eta$-Gleichheit ist (Friedman/Statman).

4.1 Kombinatorische Algebren und λ-Modelle

Eine *applikative Struktur* $\mathcal{A}$ ist ein Paar $([\![-]\!], \mathbf{app})$, wobei

- $[\![\sigma]\!]$ ist eine Menge für jedes $\sigma \in \mathrm{Ty}$,
- $\mathbf{app}_{\sigma\tau} \in [\![\sigma \to \tau]\!] \times [\![\sigma]\!]^{\mathcal{A}} \to [\![\tau]\!]$.

Wir lassen die Annotate $\sigma, \tau \ldots$ weg, wenn sie aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgehen.

Eine applikative Struktur $([\![-]\!], \mathbf{app})$ heißt *extensional*, wenn für alle $f, g \in [\![\sigma \to \tau]\!]$ gilt:

$$\frac{\forall x \in [\![\sigma]\!].\mathbf{app}(f, x) = \mathbf{app}(g, x)}{f = g}$$

Extensionale applikative Strukturen werden auch *pre-frames* genannt.

Eine *(getypte) kombinatorische Algebra* ist ein 4-Tupel $([\![-]\!], \mathbf{app}, \mathbf{k}, \mathbf{s})$, wobei $([\![-]\!], \mathbf{app})$ eine applikative Struktur ist und es gilt:

- $\mathbf{k}_{\sigma\tau} \in [\![\sigma \to \tau \to \sigma]\!]$,
- $\mathbf{s}_{\sigma\tau\rho} \in [\![(\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho]\!]$,
- $\mathbf{app}(\mathbf{app}(\mathbf{k}, x), y) = x$ für alle $x \in [\![\sigma]\!], y \in [\![\tau]\!]$,
- $\mathbf{app}(\mathbf{app}(\mathbf{app}(\mathbf{s}, x), y), z) = \mathbf{app}(\mathbf{app}(x, z), \mathbf{app}(y, z))$
  für alle $x \in [\![\sigma \to \tau \to \rho]\!], y \in [\![\sigma \to \tau]\!], z \in [\![\sigma]\!]$.

[1] Es gibt einen noch allgemeineren Modellbegriff der Katgeorientheorie verwendet (sogenannte *cartesian closed categories* oder *CCCs*). Henkin Modelle sind korrespondieren zu speziellen CCCs (nämlich welche, die *well pointed* sind).

Eine extensionale kombinatorische Algebra nennen wir λ-Modell. In diesem Fall gilt:

Lemma 4.1 *Seien* $([\![-]\!], \mathbf{app}, \mathbf{k}, \mathbf{s})$ *und* $([\![-]\!], \mathbf{app}, \mathbf{k}', \mathbf{s}')$ *extensionale kombinatorische Algebren, dann gilt* $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ *und* $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$.

D.h. das Modell ist schon von der applikativen Struktur bestimmt.

Wir interpretieren Kontexte

$$x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n$$

als eine Zuordnung ρ (genannt *Umgebung*), die jeder Variable x_i einen Wert $\rho(x_i) \in [\![\sigma_i]\!]$ zuordnet. Wir schreiben $\rho \in [\![\Gamma]\!]$. Mit $\rho, x = v$ notieren wir die Umgebung, die folgende Gleichung erfüllt:

$$(\rho, x = v)(y) = \begin{cases} v & \text{wenn } x = y \\ \rho(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir können kombinatorische Logik in kombinatorischen Algebren interpretieren, d.h. für $\Gamma \vdash^{\mathrm{SK}} M : \sigma$ definieren wir $[\![M]\!] \in [\![\Gamma]\!] \to [\![\sigma]\!]$ durch Induktion über die Struktur der Herleitung:

$$\begin{array}{rcl} [\![x]\!] & = & \rho(x) \\ [\![\mathrm{K}_{\sigma\tau}]\!]_\rho & = & \mathbf{k}_{\sigma\tau} \\ [\![\mathrm{S}_{\sigma\tau\rho}]\!]_\rho & = & \mathbf{s}_{\sigma\tau\rho} \\ [\![M\ N]\!]_\rho & = & \mathbf{app}([\![M]\!]_\rho, [\![N]\!]_\rho) \end{array}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $[\![M]\!]$ nicht von der Herleitung von $\Gamma \vdash M : \sigma$ abhängt.

Wir definieren, daß eine Gleichung gültig in einer Algebra ist

$$\mathcal{A} \models \Gamma \rhd M = N : \sigma$$

wenn gilt, daß für alle $\rho \in [\![\Gamma]\!]$ gilt: $[\![M]\!]\rho = [\![N]\!]\rho$. Wir erweitern dies zu Theorien, indem wir sagen, daß $\mathcal{A} \models \mathcal{E}$, wenn gilt, daß jede Gleichung aus $\mathcal{E}$ in X gültig ist.

Satz 4.2 (Korrektheit für kombinatorische Algebren) *Gegeben eine kombinatorische Algebra $\mathcal{A}$. Es gilt*

$$\frac{\mathcal{E} \vdash_{\mathrm{SK}} \Gamma \rhd M = N : \sigma \qquad \mathcal{A} \models \mathcal{E}}{\mathcal{A} \models \Gamma \rhd M = N : \sigma}$$

Sei $\Gamma \vdash M : \sigma$, d.h. M ist ein Term des λ-Kalküls. Wir defineren seine Interpretation in einem λ Modell :

$$[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!] = [\![\Gamma \vdash^{\mathrm{SK}} M^{\#} : \sigma]\!]$$

Es gilt also:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{[\![M]\!] \in [\![\Gamma]\!] \to [\![\sigma]\!]}$$

Die Definition von $\models$ wenden wir auch für den λ-Kalkül an.

Satz 4.3 (Korrektheit für λ-Modelle) *Gegeben ein λ-Modell $\mathcal{A}$. Es gilt*

$$\frac{\mathcal{E} \vdash_{\beta\eta} \Gamma \rhd M = N : \sigma \qquad \mathcal{A} \models \mathcal{E}}{\mathcal{A} \models \Gamma \rhd M = N : \sigma}$$

4.2 Umgebungsmodelle

Eine Alternative zu der Formalisierung der λ-Modelle unter Benutzung von kombinatorischen Algebren sind sogenannte Umgebungsmodelle (oder *frames*). Ein Umgebungsmodell ist ein Tripel $([\![-]\!]^{\mathrm{Ty}}, \mathbf{app}, [\![-]\!]^{\mathrm{Tm}}$, wobei $([\![-]\!]^{\mathrm{Ty}}, \mathbf{app})$ eine extensionale applikative Struktur ist. Wir schreiben $\Gamma \vdash^d M : \sigma$ dafür das d eine Herleitung von $\Gamma \vdash M : \sigma$ ist. $[\![-]\!]^{\mathrm{Tm}}$ ist eine Funktion, die Herleitungen interpretiert:

$$[\![\Gamma \vdash^d M : \sigma]\!]^{\mathrm{Tm}} \in [\![\Gamma]\!] \to [\![\sigma]\!]^{\mathrm{Ty}}$$

zuordnet, wobei folgendes gilt:

1. $[\![\Gamma.x : \sigma \vdash^d x : \sigma]\!]^{\mathrm{Tm}} \rho = \rho(x)$
2. $[\![\Gamma \vdash^d MN : \tau]\!]^{\mathrm{Tm}} \rho \;=\; \mathbf{app}([\![\Gamma \vdash^{d_1} M : \sigma \to \tau]\!]^{\mathrm{Tm}} \rho, [\![\Gamma \vdash^{d_2} N : \sigma]\!] \rho)^{\mathrm{Tm}}$ wobei d durch Anwendung von **app** aus d_1 und d_2 hervorgegangen ist.
3. Für alle $a \in [\![\sigma]\!]^{\mathrm{Ty}}$ gilt

   $$\mathbf{app}([\![\Gamma \vdash^d \lambda x : \sigma.M : \sigma \to \tau]\!]^{\mathrm{Tm}} \rho, x) = [\![\Gamma, x : \sigma \vdash^{d'} M : \tau]\!]^{\mathrm{Tm}} (\rho, x = a)$$

   wobei d durch Anwendung von **lam** aus d' hervorgegangen ist.

Das folgende Lemma rechtfertigt es, das d in $[\![\Gamma \vdash^d M : \sigma]\!]^{\mathrm{Tm}}$ wegzulassen.

Lemma 4.4 *Für alle Umgebungsmodelle gilt, daß $[\![-]\!]^{\mathrm{Tm}}$ nicht von der gewählten Herleitung abhängt.*

$$[\![\Gamma \vdash^d M : \sigma]\!]^{\mathrm{Tm}} = [\![\Gamma \vdash^{d'} M : \sigma]\!]^{\mathrm{Tm}}$$

Die Relation $\models$ wird sinngemäß für Umgebungsmodelle angewendet und es gilt:

Satz 4.5 (Korrektheit für Umgebungsmodelle) *Gegeben ein Umgebungsodell $\mathcal{A}$. Es gilt*

$$\frac{\mathcal{E} \vdash \Gamma \rhd M = N : \sigma \qquad \mathcal{A} \models \mathcal{E}}{\mathcal{A} \models \Gamma \rhd M = N : \sigma}$$

Gegeben eine Menge X konstruieren wir ein mengentheoretisches Modell $\mathcal{F}_X$ (der volle Frame), wobei

$$\begin{aligned}
[\![o]\!] &= X \\
[\![\sigma \to \tau]\!] &= [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!] \\
\mathbf{app}(f, x) &= f(x) \\
\mathbf{k}_{\sigma\tau} &= x \in [\![\sigma]\!] \mapsto y \in [\![\tau]\!] \mapsto x \\
\mathbf{s}_{\sigma\tau\rho} &= f \in [\![\sigma \to \tau \to \rho]\!] \mapsto g \in [\![\sigma \to \tau]\!] \mapsto x \in [\![\sigma]\!] \mapsto f(x)(g(x))
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1
Zeige, daß $\mathcal{F}_X$ ein λ-Modell ist.

2. *Gebe eine Definition von $\mathcal{F}$ als Umgebungsmodell und zeige, daß die Bedingungen erfüllt sind.*

Aufgabe 4.2 *Zeige, daß λ-Modelle und Umgebungsmodelle äquivalent sind, d.h. daß eine extensionale applikative Strutur zu einem λ-Modell erweitert werden kann, genau dann wenn sie zu einem Umgebungsmodell erweitert werden kann und, daß die Interpretation der Terme übereinstimmt.*

4.3 Vollständigkeit

Wir wollen zeigen, daß der Modellbegriff vollständig ist, d.h. daß jede Theorie $\mathcal{E}$ durch ein Modell charakterisiert werden kann. Hier verwenden wir die Regel **Str**, die nur korrekt in Modellen ist, in denen es keine leeren Typen gibt (d.h. $[\![\sigma]\!] \neq \emptyset$). Diese Einschränkung ist notwendig.

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlicher Kontext, d.h. jedes endliche Anfangsstück $\Gamma \leq \mathcal{H}$ ist ein wohlgeformter Kontext und zu jedem Typ σ gibt es unendliche viele Annahmen in $\mathcal{H}$. Wenn $\Gamma, \Gamma \leq \mathcal{H}$ dann ist $\Gamma \cup \Gamma' \leq \mathcal{H}$ das Maximum (d.h. der Längere der beiden Kontexte).

Um Vollständigkeit zu zeigen, konstruieren wir ein Termmodell zu einer Theorie $\mathcal{E}$. O.b.d.A. nehmen wir an, daß alle Kontexte in $\mathcal{E}$ in $\mathcal{H}$ enthalten sind.

Wir definieren die applikative Struktur $\mathcal{T}$:

- $$[\![\sigma]\!] = \{(\Gamma, M) \mid \Gamma \leq \mathcal{H} \wedge \Gamma \vdash M : \sigma\}// \sim$$

  wobei
  $$(\Gamma, M) \sim (\Gamma', M') \iff \exists \mathcal{E} \vdash \Gamma \cup \Gamma' \rhd M = M' : \sigma$$

- $$\mathbf{app}([(G, M)], [(\Gamma', N)]) = [(\Gamma \cup \Gamma', MN)]$$

Lemma 4.6

1. *Mit* $\mathbf{k} = \mathrm{K}$ *und* $\mathbf{s} = \mathrm{S}$ *wird* $\mathcal{T}$ *zu einer kombinatorischen Algebra.*
2. $\mathcal{T}$ *ist extensional.*

D.h. $\mathcal{T}$ *ist ein* λ*-Modell.*

Beweis:

1. Einfach.
2. Wir nehmen an $[(\Gamma_1, M_1)], [(\Gamma_2, M_2)] \in [\![\sigma \to \tau]\!]$, d.h. es gilt $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma \to \tau$ und $\Gamma_2 \vdash M_2 : \sigma \to \tau$. Weiterhin nehmen wir an:
   $$\forall (N, \Gamma) \in [\![\sigma]\!].[(\Gamma \cup \Gamma_1, M_1 N)] = [(\Gamma \cup \Gamma_2), M_2 N]$$
   Wir wählen eine Variable x, die nicht in Γ_1, Γ_2 vorkommt. Es sei $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, x : \sigma$ und $N = x$, Offensichtlich gilt $(\Gamma, x) \in [\![\sigma]\!]$ und daher $\mathcal{E} \vdash \Gamma \rhd M_1 x = M_2 x : \tau$. Wie in dem Beweis von Satz 1.16 folgt daraus $\mathcal{E} \vdash \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \rhd M_1 = M_2 : \sigma \to \tau$ und daher $[(\Gamma_1, M_1)] = [(\Gamma_2, M_2)]$.

□

Satz 4.7 (Vollständigkeit) *Es sei* $\Gamma \vdash M, N : \sigma$ *mit* $\Gamma \subseteq \mathcal{H}$

$$\frac{[\![M]\!] = [\![N]\!]}{\mathcal{E} \vdash \Gamma \rhd M = N : \sigma}$$

Beweis: Wir wählen $\rho(x) = x$ für alle x in Γ. Es gilt $[\![M]\!]\rho = [M]$. Wenn $[\![M]\!]\rho = [\![N]\!]\rho$ und daher $[M] = [N]$, dann gibt es ein $\Gamma' \subseteq \mathcal{H}$, so daß gilt $\mathcal{E} \vdash \Gamma' \rhd M = N : \sigma$. Mit **Str** folgt: $\mathcal{E} \vdash \Gamma \rhd M = N : \sigma$. □

4.4 Vollständigkeit für volle Modelle

Wir werden im Folgenden zeigen, daß die Gleichheit über eine leere Menge von Annahmen durch das volle mengentheoretische Modell über einer unendliche Grundmenge charakterisiert werden kann (also z.B. durch $\mathcal{F}_\omega$). Dies wurde zum ersten Mal von Friedmann in 1973 gezeigt. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll das Konzept der *logischen Relationen* einzuführen, die noch andere Anwendungen hat.

Gegeben zwei applikative Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Eine logische Relation $\mathcal{R} : \mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ist eine Familie von Relationen,

$$\mathcal{R}^\sigma \subseteq [\![\sigma]\!]^{\mathcal{A}} \times [\![\sigma]\!]^{\mathcal{B}}$$

für jedes $\sigma \in \mathrm{Ty}$, so daß gilt

$$f \mathcal{R}^{\sigma \to \tau} g \iff \forall x \mathcal{R}^\sigma y.\mathbf{app}(f, x) \mathcal{R}^\tau \mathbf{app}(g, y)$$

Wir erweitern logische Relationen auf Kontexte und Umgebungen, indem wir sagen:

$$\rho \mathcal{R}^\Gamma \rho' \iff \forall x : \sigma \in \Gamma.\rho(x) \mathcal{R}^\sigma \rho'(x)$$

Das folgende Lemma wird im Allgemeinen die *fundamentale Eigenschaft der logischen Relationen* genannt:

Lemma 4.8 *Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lambda Modelle, $\mathcal{R} : \mathcal{A} \iff \mathcal{B}$, $\Gamma \vdash M : \sigma$ und $\rho \mathcal{R}^\Gamma \rho'$. Dann gilt*

$$[\![M]\!]^{\mathcal{A}}(\rho) \mathcal{R}^\sigma [\![M]\!]^{\mathcal{A}}(\rho)$$

Beweis: Durch Induktion über die Struktur der Herleitung von $\Gamma \vdash M : \sigma$. $\Box$

Wir können uns im Folgenden auf geschlossene Gleichungen beschränken, da eine $\beta\eta$-Theorie schon vollständig durch ihr Verhalten auf geschlossene Terme charakterisiert wird (Aufgabe).

Eine partielle logische Funktion ist eine logische Relation, die überall eine partielle Funktion ist, d.h.

$$\frac{x \mathcal{R}^\sigma y \qquad x \mathcal{R}^\sigma y'}{y = y'}$$

Lemma 4.9 *$\mathcal{R} : \mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ sei eine logische Funktion zwischen λ-Modellen, dann gilt*

$$\frac{\mathcal{A} \models M = N : \sigma}{\mathcal{B} \models M = N : \sigma}$$

Beweis: Aus 4.8 folgt:

$$[\![M]\!]^{\mathcal{A}} \mathcal{R}^\sigma [\![M]\!]^{\mathcal{B}}$$

$$[\![N]\!]^{\mathcal{A}} \mathcal{R}^\sigma [\![N]\!]^{\mathcal{B}}$$

Die Vorrausetzung sagt aus, daß $[\![M]\!]^{\mathcal{A}} = [\![N]\!]^{\mathcal{A}}$ und damit folgt aus der Annahme, daß $\mathcal{R}$ eine logische Funktion ist: $[\![M]\!]^{\mathcal{B}} = [\![N]\!]^{\mathcal{B}}$, also $\mathcal{B} \models M = N : \sigma$. $\Box$

Eine logische partielle Surjektion ist eine partielle logische Funktion, die zusätzlich noch die Eigenschaft hat:

$$\forall y.\exists x.x \mathcal{R}^\sigma y$$

Lemma 4.10 *Sei $\mathcal{A}$ ein λ Modell, X eine Menge, so daß es eine Surjektion $f : X \to [\![o]\!]^{\mathcal{A}}$ gibt, dann gibt es eine logische partielle Surjektion*

$$\mathcal{R}_f : \mathcal{F}_X \iff \mathcal{A}$$

Beweis: Durch Induktion über σ. Für $\sigma = o$ erfüllt $\mathcal{R}^o = f$ die Bedingung. Für $\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ gilt

$$f\mathcal{R}^{\sigma_1 \to \sigma_2} g \iff \forall x \mathcal{R}^{\sigma_1} y \Rightarrow \mathbf{app}(f, x) = f(x)\mathcal{R}^{\sigma_2}\mathbf{app}(g, x)$$

Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{R}^{\sigma_1 \to \sigma_2}$ funktional ist: Angenommen $f\mathcal{R}^{\sigma_1 \to \sigma_2} g, g'$. Gegeben ein beliebiges $y \in [\![\sigma_1]\!]^{\mathcal{A}}$, wegen der Surjektivität von $\mathcal{R}^{\sigma_1}$ gibt es ein $x\mathcal{R}^{\sigma_1} y$. Aus der definierenden Eigenschaft der Relation folgt: $f(x)\mathcal{R}^{\sigma_2}\mathbf{app}(g, y), \mathbf{app}(g', y)$ und mit der Funktionalität von $\mathcal{R}^{\sigma_2}$ folgt $\mathbf{app}(g, y) = \mathbf{app}(g', y)$. Da y beliebig war, folgt aus der Extensionalität von $\mathcal{A}$: $g = g'$.

Um die Surjektivitätseigenschafte zu zeigen, nehmen wir an $f \in [\![\sigma_1 \to \sigma_2]\!]^{\mathcal{A}}$. Wir wählen eine Funktion, $f \in [\![\sigma_1]\!]^{\mathcal{F}_X} \to [\![\sigma_2]\!]^{\mathcal{F}_X}$, die die Eigenschaft hat: Wenn $x\mathcal{R}^{\sigma_1} z$ dann $f(x)\mathcal{R}^{\sigma_2}\mathbf{app}(g, z)$. Wenn $[\![\sigma_2]\!]^{\mathcal{F}_X}$ nicht leer ist, gibt es mindestens eine Funktion mit dieser Eigenschaft (dabei müssen wir die Surjektivität von $\mathcal{R}^{\sigma_2}$ verwenden. □

Sei X eine unendliche Menge (z.B. ω), dann gibt es eine Surjektion: $f \in X \to [\![o]\!]^{\mathcal{T}}$, da $\mathcal{T}$ abzählbar unendlich ist. Damit folgt

Korollar 4.11

$$\mathcal{F}_X \models M = N : \sigma \iff \vdash M = N : \sigma$$

Beweis: $\Leftarrow$ folgt aus der Korrekheit und $\Rightarrow$ aus den Lemmas 4.9,4.10 zusammen mit der Beobachtung, daß es eine Surjektion $f \in X \to [\![o]\!]^{\mathcal{T}}$ gibt. □