λ-Kalkül und Typen
2.Teil

Thorsten Altenkirch
email: alti@informatik.uni-muenchen.de

26. November 1996

2 Reduktion

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff der $\beta\eta$-Reduktion einführen und zeigen, daß diese Reduktion für wohlgetypte Terme stark normalisierend ist und die Church-Rosser-Eigenschaft hat. Ein wichtiges Korollar ist, daß die $\beta\eta$-Gleichheit entscheidbar ist.

2.1 Begriffe der Termersetzung

Wir wollen im Folgenden einige Begriffe und Fakten aus der Termersetzung in Erinnerung rufen und unsere Notation einführen. Es sei T eine Menge von Termen, und $\rightarrow_R \subseteq T \times T$ eine Relation. Zu jedem $t \in T$ ist $\mathrm{next}_R(t) = \{t' \mid t \rightarrow_R t'\}$ die Menge der unmittelbaren Nachfolger. Wir nehmen an, daß sich $\mathrm{next}_R(t)$ immer effektiv aufzählen läßt. Ist $\mathrm{next}_R(t)$ endlich für alle t nennen wir $\rightarrow_r$ *endlich verzweigt*. Ist $\mathrm{next}_R(t) = \emptyset$ ist t eine *Normalform* (oder ist *in Normalform*).

Gegeben $\rightarrow_R$ notieren wir mit $\twoheadrightarrow^+_R$ / $\twoheadrightarrow_R$ / $\sim_R$ die transitive / transitiv-reflexive / transitiv-symmetrisch-reflexive Hülle von $\rightarrow_R$. Unter einer Hülle verstehen wir die kleinste Relation, die R enthält und die entsprechenden Eigenschaften hat.

Intuitiv ist $\rightarrow_R$ die 1-Schritt-Reduktion, $\twoheadrightarrow_R$ die n-Schritt-Reduktion, wobei auch $n = 0$ zugelassen ist, während $\twoheadrightarrow^+_R$, die n-Schritt-Reduktion mit $n > 0$ ist. $\sim_R$ ist die mit $\rightarrow_R$ assoziierte Konversion, wobei es erlaubt ist, $\rightarrow_R$ beliebig oft vorwärts oder rückwärts anzuwenden.

Wir sagen, $\rightarrow_R$ ist *schwach Church-Rosser*, wenn gilt, daß es für alle $t_1 \leftarrow_R t \rightarrow_R t_2$ ein t_3 gibt, so daß gilt $t_1 \twoheadrightarrow_R t_3 \twoheadleftarrow_R t_2$. Diagrammatisch wird diese Eigenschaft wie folgt dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t_1 \arrow[dr, two heads] & & t_2 \arrow[dl, two heads] \\
 & t_3 &
\end{tikzcd}$$

Wir sagen, daß $\rightarrow_R$ *Church-Rosser* ist, wenn die Voraussetzung ist $t_1 \twoheadleftarrow_R t \twoheadrightarrow_R t_2$, diagrammatisch:

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
t_1 \arrow[dr, two heads] & & t_2 \arrow[dl, two heads] \\
 & t_3 &
\end{tikzcd}
$$

Wir schreiben CR_R für die Menge der Terme, für die die Church-Rosser Eigenschaft gilt.

Die folgende Relation über der Menge $\{a, b, c, d\}$ ist schwach Church-Rosser, aber nicht Church-Rosser:

$$
\begin{tikzcd}
a & b \arrow[l] \arrow[r, shift left] & c \arrow[l, shift left] \arrow[r] & d
\end{tikzcd}
$$

Lemma 2.1 (Eindeutigkeit von Normalformen) *Wenn $\to_R$ Church-Rosser ist, dann sind die Normalformen, die man aus einem Term ableiten kann eindeutig bestimmt, d.h. wenn $t_1 \twoheadleftarrow t \twoheadrightarrow t_2$ und t_1, t_2 sind Normalformen, dann gilt auch $t1 = t_2$.*

Beweis: Folgt direkt aus der Church-Rosser-Eigenschaft: t_1, t_2 haben ein gemeinsames Redukt, aber da sie Normalformen sind, ist die Länge der Ableitung $= 0$. $\square$

Wir sagen $\to_R$ ist normalisierend, wenn es für jedes t eine endliche Reduktionsfolge $t \to_R t_1 \to_R t_2 \ldots \to_R t_n$ gibt, wobei t_n Normalform ist. $\to_R$ heißt stark normalisierend,[1] wenn alle Reduktionsfolgen endlich sind. Wir schreiben SN_R für die Menge der Terme, für die $\to_R$ stark normalisierend ist.

Um über stark normalisierende Terme Aussagen beweisen zu können verwenden wir das Prinzip der *Noetherschen Induktion*:

Prinzip 2.2 (Noethersche Induktion) *Sei $P \subseteq T$, und es gilt für alle $t \in T$:*

$$\frac{\forall t'.t \to_R t' \Rightarrow t' \in P}{t \in P}$$

dann gilt $\mathrm{SN}_R \subseteq P$

Tatsächlich können wir Noethersche Induktion verwenden, um stark normalisierend zu definieren: SN_R ist die kleinste Menge, die unter

$$\frac{\forall t'.t \to_R t' \Rightarrow t' \in \mathrm{SN}_R}{t \in \mathrm{SN}_R}$$

abgeschlossen ist. Das Prinzip der Noetherschen Induktion folgt aus dieser Definition.

Wir definieren die partielle Funktion $\nu(M)$ als die Länge der längsten Ableitung, die mit M beginnt. Ein Reduktion heißt *beschränkt*, wenn ν immer definiert ist. Es ist wichtig anzumerken, daß nicht jede stark normalisierende Relation beschränkt ist. Ein Gegenbeispiel ist:

$$R = \{(m, n) \in \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat} \mid m = 0 \vee 0 < n < m\}$$

[1]oder noethersch.

Jede Ableitung, die mit 0 beginnt ist endlich, aber es gibt keine Schranke für die Länge dieser Ableitung.

Es gilt jedoch:

Lemma 2.3 *Wenn $\rightarrow_R$ endlich verzweigt (d.h. $\{t' | t \rightarrow_R t'\}$ ist endlich für alle T) und stark normalisierend ist, dann ist $\rightarrow_R$ beschränkt.*

Beweis: Direkte Konsequenz aus König's Lemma (In einem Baum mit unendlicher Tiefe gibt es auch einen unendlichen Pfad). $\Box$

Da die Reduktionen, die wir betrachten alle endlich verzweigt sind, sind die Begriffe *stark normalisierend* und *beschränkt* äquivalent und wir können anstelle von Noetherscher Induktion Induktion über $\nu(M)$ verwenden.

Als Anwendung der Noetherschen Induktion beweisen wir folgenden Satz:

Satz 2.4 (Newman) *Wenn $\rightarrow_R$ stark normalisierend und schwach Church-Rosser ist, dann ist $\rightarrow_R$ Church-Rosser.*

Beweis: Wir verwenden Noethersche Induktion, um zu zeigen, daß unter der Annahme daß $\rightarrow_R$ schwach Church Rosser ist gilt: $\mathrm{SN}_R \subseteq P = \mathrm{CR}_R$. Für ein beliebiges $t \in T$ setzen wir also voraus

$$\forall t'.t \rightarrow_R t' \Rightarrow t' \in \mathrm{CR}_R \qquad \text{(IV)}$$

Zu zeigen ist: $t \in \mathrm{CR}_R$. Wir betrachten $t_1 \twoheadleftarrow_R t \twoheadrightarrow_R t_2$. Falls die Länge einer der beiden Ableitungen 0 ist, ist die Konklusion trivial. Ansonsten erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & t \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{wCR}"] & & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t_1 \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{IV}"] & & \bullet \arrow[dl] & & t_2 \arrow[ddll] \\
 & \bullet \arrow[dr] & & \mathrm{IV} & \\
 & & t_3 & &
\end{tikzcd}$$

Das Quadrat mit der Inschrift wCR folgt aus der schwachen Church-Rosser-Eigenschaft und die Rechtecke, die mit IV beschriftet sind, folgen aus der Induktionsannahme.

Damit folgt mit der Noetherschen Induktion, daß $\mathrm{SN}_R \subseteq \mathrm{CR}_R$. $\Box$

Die Church-Rosser Eigenschaft hat die wichtige Konsequenz, daß $\sim_R$ sich auf Reduktion zurückführen läßt:

Lemma 2.5 *Sei $\rightarrow_R$ Church-Rosser, dann gilt $t_1 \sim_R t_2$ gdw. es gibt ein t_3, so daß $t_1 \twoheadrightarrow_R t_3 \twoheadleftarrow_R t_2$.*

Beweis: Wiederholte Anwendung der Church-Rosser-Eigenschaft. $\square$

Lemma 2.6 *Sei R eine Reduktionsrelation, für die sich Nachfolger effektiv aufzählen lassen*[2]*. Für $t, t' \in \mathrm{SN}_R \cap \mathrm{CR}_R$ ist $t \sim_R t'$ entscheidbar.*

Beweis: Wir berechnen wiederholt 1-Schritt-Reduktionen von t, t' bis wir Normalformen u, u' erreicht haben. Aufgrund von Lemma 2.5 gilt, daß $u = u'$ gdw. $t \sim_R t'$.
$\square$

2.2 $\beta\eta$-Reduktion

Wir definieren $\rightarrow_{\beta\eta} \subseteq \mathrm{Tm} \times \mathrm{Tm}$ als die kleinste Relation, die unter den folgenden Regeln abgeschlossen ist:

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M)N \rightarrow_{\beta\eta} M[x := N]}\ \beta^r$$

$$\frac{x \notin \mathrm{FV}(M)}{\lambda x : \sigma.Mx \rightarrow_{\beta\eta} M}\ \eta^r$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta\eta} M'}{MN \rightarrow_{\beta\eta} M'N}\ \mathbf{appl} \qquad \frac{N \rightarrow_{\beta\eta} N'}{MN \rightarrow_{\beta\eta} MN'}\ \mathbf{appr}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\beta\eta} M'}{\lambda x : \sigma.M \rightarrow_{\beta\eta} \lambda x : \sigma.M'}\ \xi^r$$

Als Spezialfälle betrachten wir

β-reduktion $\rightarrow_\beta$, Abschluß nur unter $\{\beta^r, \mathbf{appl}, \mathbf{appr}, \xi^r\}$.

weak-head-reduktion [3] $\rightarrow_{\mathrm{whd}}$, Abschluß nur unter $\{\beta^r, \mathbf{appl}\}$

Im Folgenden lassen wir den Index $\beta\eta$ weg.

Hier kommen die schlechten Neuigkeiten! $\rightarrow$ ist weder normalisierend noch (schwach) Church-Rosser.

Ein einfaches Gegenbeispiel zur Normalisierung, das vom ungetypten λ-Kalkül kommt, ist $\Omega = (\lambda x : \sigma.xx)(\lambda x : \sigma.xx)$ Es ist leicht zu sehen, daß die einzige 1-Schritt-Reduktion von Ω wieder Ω ist.

Ein (das) Gegenbeispiel für die schwache Church-Rosser-Eigenschaft ist:

$$\begin{tikzcd}
 & \lambda x : \sigma.(\lambda y : \tau.M)x \arrow[dl, "\eta^r"'] \arrow[dr, "{\xi^r, \beta^r}"] & \\
\lambda y : \tau.M & & \lambda x : \sigma.M[x := y]
\end{tikzcd}$$

Wenn $\sigma \not\equiv \tau$ ist dann gibt es keine gemeinsamen Redukte von $\lambda y : \tau.M$ und $\lambda x : \sigma.M[x := y]$.

Wir beobachten, daß beide Gegenbeispiele sich nicht typisieren lassen. In der Tat werden wir nachweisen, daß für getypte λ-Terme beide Eigenschaften gelten. Zunächst zeigen wir, daß $\rightarrow_\beta$ immer Church-Rosser ist.

[2]Dies Bedingung ist für die Anwendung eigentlich zu stark, da es ausreicht, daß man einen Nachfolger effektv auswählen kann.

[3]Die deutsche Übersetzung wird aus offensichtlichen Gründen selten verwendet.

2.3 Church-Rosser für $\rightarrow_\beta$

Satz 2.7 *$\rightarrow_\beta$ ist Church-Rosser.*

Beweis: Siehe [Bar84], Theorem 3.2.8. □

2.4 Konversion und Gleichheit

Zunächst beobachten wir, daß beweisbar gleiche Terme konvertierbar sind:

Lemma 2.8

$$\frac{\vdash_s \Gamma \rhd M = M' : \sigma \qquad s \in \{\beta, \beta\eta\}}{M \sim_s M'}$$

Beweis: Induktion über die Herleitung von $\vdash_s \Gamma \rhd M = M' : \sigma$, alle Fälle sind einfach. □

Die Umkehrung von Lemma 2.8 gilt im Allgemeinen nicht. Jedoch gilt folgendes:

Lemma 2.9 (Subjekt-Reduktion)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad M \rightarrow_s M' \qquad s \in \{\beta, \beta\eta\}}{\vdash_s \Gamma \rhd M = M' : \sigma}$$

Beweis: Übung.
□

Im Spezialfall β folgt damit:

Korollar 2.10

$$\frac{M \sim_\beta M' \qquad \Gamma \vdash M, M' : \sigma}{\vdash_\beta \Gamma \rightarrow_\beta M = M' : \sigma}$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.7 und Lemma 2.9. □

Für η ist dies zunächst nicht klar, da wir die Church-Rosser-Eigenschaft noch nicht nachgewiesen haben. Und es könnte ja schließlich eine Herleitung von $M \sim M'$ geben, die notwendigerweise nicht-typisierbare Terme verwendet.

2.5 Starke Normaliserung

Wir werden die starke Normalisierung nachweisen, indem wir eine Interpretation der Typen $[\![\sigma]\!] \subset \mathrm{Tm}$ angeben[4], so daß gilt:

1. $[\![\sigma]\!] \subseteq \mathrm{SN}$
2. $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma}{M \in [\![\sigma]\!]}$

Daraus folgt direkt

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{M \in \mathrm{SN}}$$

Wir definieren $[\![\sigma]\!]$ durch Induktion über die Typen:

1. $[\![o]\!] = \mathrm{SN}$
2. $[\![\sigma \rightarrow \tau]\!] = \{M | \forall_{N \in [\![\sigma]\!]} MN \in [\![\tau]\!]\}$

[4] Dies ist kein Modell im Sinne von Abschnitt !

Die Menge der neutralen Terme $\mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}}$ ist die Menge der Terme der Form $xN_1N_2\ldots N_n$, wobei $N_i \in \mathrm{SN}$.

Lemma 2.11

1. $\mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}} \subseteq \mathrm{SN}$

2. $\dfrac{\forall x \in V. Mx \in \mathrm{SN}}{M \in \mathrm{SN}}$

Beweis: Übung, $\Box$

Lemma 2.12

1. $\mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}} \subseteq \llbracket \sigma \rrbracket$

2. $\llbracket \sigma \rrbracket \subseteq \mathrm{SN}$

Beweis: Wir beweisen 1. und 2. durch parallele Induktion über die Struktur von σ:

$\sigma = o$

1. Folgt aus Lemma 2.11, 1.
2. Folgt direkt aus der Definition.

$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$

1. Sei $M \in \mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}}$ und $N \in \llbracket \sigma_1 \rrbracket$ beliebig. Aus IV, 2. folgt $N \in \mathrm{SN}$ und damit ist $MN \in \mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}}$ und mit IV, 1. $MN \in \llbracket \sigma_2 \rrbracket$.
   Also folgt $M \in \llbracket \sigma_1 \to \sigma_2 \rrbracket$.
2. Sei $M \in \llbracket \sigma_1 \to \sigma_2 \rrbracket$, dann gilt für alle $x \in V$: $x \in \mathrm{Ne}_{\mathrm{SN}} \subseteq \llbracket \sigma_1 \rrbracket$ (mit IV, 1.). Daher ist $Mx \in \sigma_2$ und aus IV, 2. folgt $Mx \in \mathrm{SN}$ und wir können mit Lemma 2.11, 2. schließen: $M \in \mathrm{SN}$.

$\Box$

Lemma 2.13 *Wenn*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr, "\text{whd}"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

dann ist entweder $M_1 \equiv M_2$ *oder es gibt ein* M_3*, so daß gilt:*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr, "\text{whd}"'] & & M_2 \arrow[dl] \\ & M_3 & \end{tikzcd}$$

Beweis: Übung
$\Box$

Das letzte Lemma ist eine schwache Form des *Standardierungstheorems*: Eine Weak-head-reduktion kann zwar verschoben werden, aber sie muß irgendwann ausgeführt werden.

Lemma 2.14

$$\frac{M \in \mathrm{SN} \qquad M \rightarrow_{\mathrm{whd}} M' \in [\![\sigma]\!]}{M \in [\![\sigma]\!]}$$

Beweis: Übung
□

Lemma 2.15

$$\frac{\forall_{N \in [\![\sigma]\!]} M[x := N] \in [\![\tau]\!]}{\lambda x : \sigma . M \in [\![\sigma \rightarrow \tau]\!]}$$

Beweis: Um zu zeigen, daß $\lambda x : \sigma . M \in [\![\sigma \rightarrow \tau]\!]$ müssen wir zeigen, daß unter der Annahme

$$N \in [\![\sigma]\!]$$

gilt $(\lambda x : \sigma . M)N \in \tau$. Wir verwenden Lemma 2.14. Es gilt $(\lambda x : \sigma . M)N \rightarrow_{\mathrm{whd}} M[x := N]$ und $M[x := N] \in \tau$ folgt aus den Annahmen. Es bleibt zu zeigen $(\lambda x : \sigma . M)N \in \mathrm{SN}$. Wir zeigen dies durch Induktion über $n = \nu(M) + \nu(N)$ (es ist leicht zu sehen, daß $M, N \in \mathrm{SN}$). Wenn $n = 0$ ist das einzige mögliche Redukt $M[x := N] \in [\![\tau]\!] \subseteq \mathrm{SN}$. Im Fall $n+1$ gibt es diese Reduktion oder es wird in M oder N reduziert. In diesem Fall können wir direkt die Induktionsannahme verwenden.
□

Eine parallele Substitution ist eine Folge

$$x_1 := N_1, x_2 := N_2, \ldots, x_n := N_n$$

wobei wir annehmen, daß alle Variablen verschieden sind. Wir schreiben

$$M[\vec{x} := \vec{N}]$$

für

$$M[x_1 := N_1][x_2 := N_2] \ldots [x_n := N_n]$$

Wir interpretieren Kontexte

$$\Gamma = x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n$$

durch parallele Substitutionen $\vec{x} := \vec{N}$, so daß gilt $N_i \in [\![\sigma]\!]$. Wir bezeichnen diese Menge durch $[\![\Gamma]\!]$.

Wir beweisen jetzt eine Korrektheitseigenschaft von $[\![\sigma]\!]$

Lemma 2.16

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \vec{x} := \vec{N} \in [\![\Gamma]\!]}{M[\vec{x} := \vec{N}] \in [\![\sigma]\!]}$$

Beweis: Durch Induktion über die Struktur der Herleitung $\Gamma \vdash M : \sigma$.

var Folgt direkt aus der Voraussetzung.

app Es sei $M = M_1 M_2$ und $G \vdash M_1 : \sigma' \rightarrow \sigma$, $G \vdash M_2 : \sigma'$. Gegeben $\vec{x} := \vec{N}$, es folgt aus den Induktionsvoraussetzungen:

$$M_1[\vec{x} := \vec{N}] \in [\![\sigma' \rightarrow \sigma]\!]$$

$$M_2[\vec{x} := \vec{N}] \in [\![\sigma']\!]$$

Daraus folgt aber direkt durch die Definition von $[\![\sigma' \rightarrow \sigma]\!]$:

$$(M_1 M_2)[\vec{x} := \vec{N}] = (M_1[\vec{x} := \vec{N}]) M_2[\vec{x} = \vec{N}] \in [\![\sigma]\!]$$

lam Es sei $M = \lambda x : \sigma_1.M'$,$\sigma = \sigma_1 \to \sigma_2$ und $G, x : \sigma_1 \vdash M' : \sigma_2$. Gegeben sei $\vec{x} := \vec{N}$ nun gilt für ein beliebiges $N \in [\![\sigma_1]\!]$ aufgrund der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} M'[x := N][\vec{x} := \vec{N}] &= M'[\vec{x}, x := \vec{N}, N] \\ &\in [\![\sigma_2]\!] \end{aligned}$$

Wir können nun Lemma 2.15 anwenden, um zu schließen:

$$\lambda x : \sigma_1.M' \in [\![\sigma_1 \to \sigma_2]\!]$$

□

Satz 2.17

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{M \in \mathrm{SN}}$$

Beweis: Es sei $\Gamma = x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n$. Wir haben $\vec{x} := \vec{x} \in [\![\Gamma]\!]$, da $x_i \in [\![\sigma_i]\!]$ (Lemma 2.12, 1.). Daher folgt mit Lemma 2.16 und Lemma 2.12, 2.:

$$M = M[\vec{x} := \vec{x}] \in [\![\sigma]\!] \subseteq \mathrm{SN}$$

□

Korollar 2.18 *Die Gleichheit $\vdash_\beta \Gamma \triangleright M = N : \sigma$ ist entscheidbar.*

Beweis: Aus Lemma 2.8 und Korollar 2.10 folgt, daß

$$\vdash_\beta \Gamma \triangleright M = N : \sigma \iff M \sim_\beta N$$

Da $\to_\beta \subseteq \to_{\beta\eta}$ können wir aus Satz 2.17 schließen, daß $M, N \in \mathrm{SN}_\beta$. Mit Satz 2.7 läßt sich Lemma 2.6 anwenden. □

2.6 Church-Rosser für $\to_{\beta\eta}$

Der Beweis von Mitchell, daß $\to$ für getypte Terme Church-Rosser ist folgt genau der Struktur des starken Normalisierungsbeweises[5]

1. $[\![o]\!] = \mathrm{CR}$
2. $[\![\sigma \to \tau]\!] = \{M | \forall_{N \in [\![\sigma]\!]} MN \in [\![\tau]\!]\}$

Wir definieren:

$$\mathrm{Ne}_{\mathrm{CR}} = \{xN_1N_2\ldots N_n | N_i \in \mathrm{CR}\}$$

Lemma 2.19 *1.* $\mathrm{Ne}_{\mathrm{CR}} \subseteq \mathrm{CR}$

2. $$\frac{\forall x \in V.Mx \in \mathrm{CR}}{M \in \mathrm{CR}}$$

Beweis:

1. Wenn $N = xN_1N_2\ldots N_n \twoheadrightarrow M$ dann ist $M = xN_1'N_2'\ldots N_n'$, wobei $N_i \twoheadrightarrow N_i'$. Damit folgt $N \in \mathrm{CR}$ aus $N_i \in \mathrm{CR}$.

[5] Mitchell führt den Begriff der *type closed* Prädikate ein, für die SN und CR Instanzen sind — siehe [Mit96].

2. Wir nehmen an $M_1 \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M_2$. Sei $x \notin \mathrm{FV}(M)$, es gilt: $M_1 x \twoheadleftarrow Mx \twoheadleftarrow M_2 x$. Aus der Annahme folgt, daß es ein N gibt, so daß $M_1 x \twoheadrightarrow N \twoheadleftarrow M_2 x$. Wir analisieren nun die Reduktion $M_i \twoheadrightarrow N$ (mit $i \in \{1, 2\}$). Es gibt zwei Möglichkeiten:

   (a) $N = M_i' x$ und $M_i \twoheadrightarrow M_i'$, oder

   (b) $M_i x \twoheadrightarrow (\lambda y : \sigma . M_i')x \rightarrow M_i'[y := x] \twoheadrightarrow N$, wobei $M_i \twoheadrightarrow \lambda y : \sigma . M_i'$ daraus folgt $M_i \twoheadrightarrow \lambda y : \sigma . N[x := y] \equiv \lambda x : \sigma . N$ wobei wir ausnutzen, daß $x \notin \mathrm{FV}(M_i)$.

   Wir unterscheiden jetzt die folgenden Fälle:

   - $M_1 x, M_2 x$ reduzieren gemäß (a)
     Dann haben wir schon $N' = M_1' = M_2'$, so daß $M_1 \twoheadrightarrow N' \twoheadleftarrow M_2$.
   - $M_1 x, M_2 x$ reduzieren gemäß (b). Wir haben $M_1 \twoheadrightarrow \lambda x : \sigma . N \twoheadleftarrow M_2$.
   - M_1 reduziert gemäß (a) und M_2 gemäß (b)
     Wir haben $M_2 \twoheadrightarrow M_2'$ und $N = M_2' x$. Aus der ersten Vorbedingung folgt

     $$M_1 \twoheadrightarrow \lambda x : \sigma . N = \lambda x : \sigma . M_2' x \rightarrow M_2'$$

     unter Ausnutzung der η-Regel und $x \notin \mathrm{FV}(M_2')$. Also ist M_2' ein gemeinsames Redukt.
   - M_1 reduziert gemäß (b) und M_2 gemäß (a)
     Symmetrisch zum vorigen Fall.

□

Lemma 2.20

1. $\mathrm{Ne}_{\mathrm{CR}} \subseteq [\![\sigma]\!]$

2. $[\![\sigma]\!] \subseteq \mathrm{Ne}_{\mathrm{CR}}$

Beweis: Identisch zu 2.12. □

Lemma 2.21

$$\frac{M \in \mathrm{CR} \qquad M \rightarrow_{\mathrm{whd}} M' \in [\![\sigma]\!]}{M \in [\![\sigma]\!]}$$

Beweis: Übung
Hinweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Struktur der Typen unter Ausnutzung von Lemma 2.13. □

Lemma 2.22

$$\frac{\forall_{N \in [\![\sigma]\!]} M[x := N] \in [\![\tau]\!]}{\lambda x : \sigma . M \in [\![\sigma \rightarrow \tau]\!]}$$

Beweis: Übung.
Hinweis: Ähnlich wie Lemma 2.15. □

Lemma 2.23

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \vec{x} := \vec{N} \in [\![\Gamma]\!]}{M[\vec{x} := \vec{N}] \in [\![\sigma]\!]}$$

Beweis: Identisch zu Lemma 2.16. □

Satz 2.24

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{M \in \mathrm{CR}}$$

Beweis: Analog zu Satz 2.17. $\square$

Korollar 2.25

$$\frac{M \sim_\beta M' \qquad \Gamma \vdash M, M' : \sigma}{\vdash_\beta \Gamma \rightarrow_\beta M = M' : \sigma}$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 2.24 und Lemma 2.9. $\square$

Korollar 2.26 *Die Gleichheit* $\vdash_{\beta\eta} \Gamma \rhd M = N : \sigma$ *ist entscheidbar.*

Beweis: Analog zu Korollar 2.18 unter Ausnutzung von Kor. 2.25 und Satz 2.17. $\square$

Literatur

[Bar84] H.P. Barendregt. *The Lambda Calculus - Its Syntax and Semantics (Revised Edition).* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland, 1984.

[Mit96] John C. Mitchell. *Foundations for Programming Languages.* MIT Press, 1996.